2 Segunda Unidad Didáctica

"EXPERIMENTOS ALEATORIOS"
"CALCULO DE PROBABILIDADES"

2.1 Parte básica

2.1.1 Experimentos aleatorios

Si buscamos en el diccionario la palabra "experimentar", significa percatarse de algo por propia experiencia y llamamos "experimento" al efecto de experimentar. Los experimentos pueden ser **aleatorios** o **deterministas**.

Aleatorio significa relativo a todo acontecimiento incierto, por depender de la suerte o del azar, mientras que los **deterministas** son aquellos que se caracterizan por el hecho de que las mismas causas producen los mismos efectos.

A nosotros nos interesan los experimentos aleatorios y dejamos los experimentos deterministas para que los estudiéis en Física.

Cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama "suceso elemental" y al conjunto de todos los sucesos elementales se le llama "***espacio muestral***" y suele representarse por E.

EJEMPLO 2.1:

Sea el experimento "lanzar un dado y observar la puntuación de su cara superior", Obtener el espacio muestral:

Solución:

E={1, 2, 3, 4, 5, 6}

Cualquier parte del espacio muestral se denomina suceso, por ejemplo:

"salir número par" = {12, 4, 6}
"salir número impar" = {1, 3, 5}

Hay algunos sucesos especialmente importantes que pasamos a enumerar:

-**"Suceso imposible"**: es el que no se verifica nunca y lo representamos por Ø.

- **"Suceso seguro"**: es el que ocurre siempre, es decir, el espacio muestral.

- **"Suceso contrario"**: el suceso contrario de A se verifica siempre que no se de A y suele indicarse como A^C.

- **"Sucesos incompatibles":** son dos sucesos que no pueden verificarse al mismo tiempo.

- **"Sucesos compatibles":** son dos sucesos que pueden verificarse al mismo tiempo.

2.1.2 Operaciones con sucesos

Unión de sucesos: si tenemos dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, definimos $A \cup B$ como el suceso que se verifica siempre que se verifica A ó siempre que se verifica B. (Ver figura 2.1).

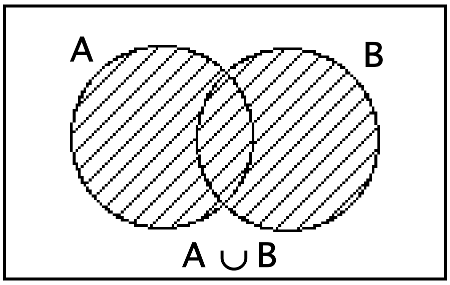


Figura 2.1: Representación gráfica de la *UNIÓN*

Intersección de sucesos: dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, definimos $A \cap B$ como el suceso que se verifica siempre que se verifican A y B al mismo tiempo. (Ver figura 2.2)

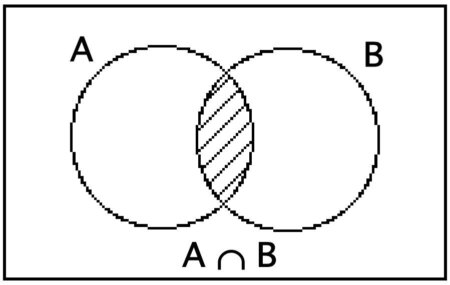


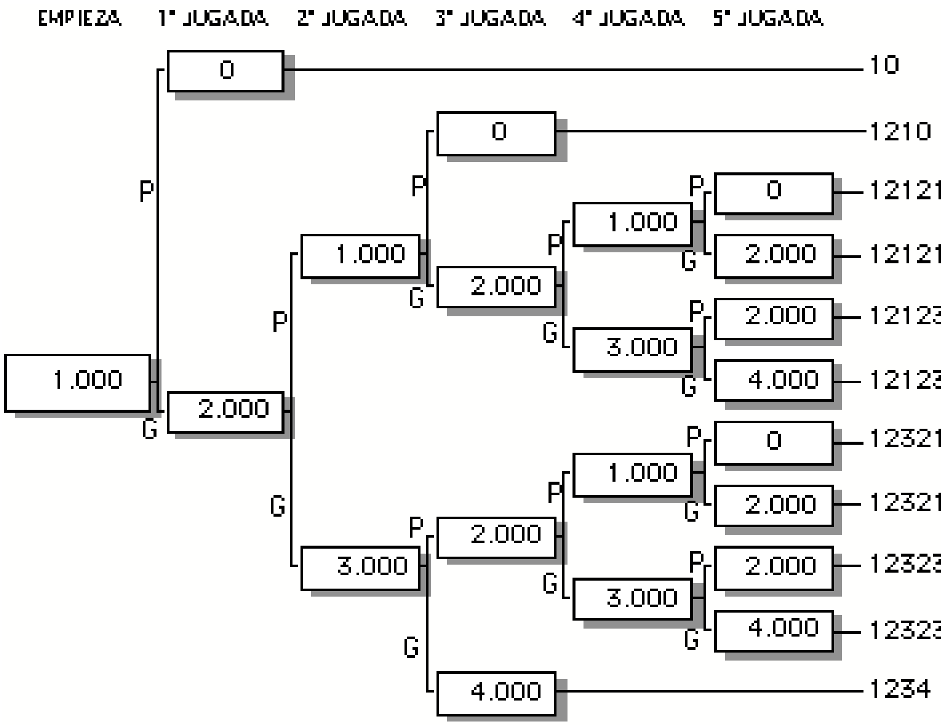
Figura 2.2: Representación gráfica de la *INTERSECCIÓN*

EJEMPLO 2.2:

Un aficionado a los casinos tiene tiempo para jugar a la ruleta cinco veces a lo sumo.

Cada apuesta es de 1000 pts. Empieza con 1000 pts. y deja de jugar cuando pierda las 1000 pts. o cuando gane 3000 pts. Obtener el espacio muestral.

Solución:



El espacio muestral sería:

$$E = \{P, GG, GPP, GPGG, GPGPG, GPGPP\}$$

EJEMPLO 2.3:

Se ha observado la distribución del sexo de los hijos en familias de tres hijos.

Sean los sucesos:

A: "el hijo mayor es varón"

B: "los dos hijos pequeños son varones"

¿Cuáles son los elementos de A y de B?

Solución

A = {VVV, VVH, VHV, VHH} B = {HVV, VVV}

EJEMPLO 2.4:

En una encuesta, los resultados del interrogatorio de cada persona se reflejan en una tarjeta. En las tarjetas se consideran el sexo, la edad (mayor o menor de 30 años), y la respuesta a la pregunta (Sí, No). Se pide:

a) El espacio muestral.

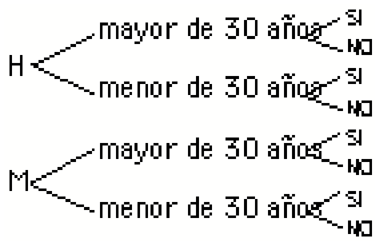
b) Formar los siguientes sucesos:

A: "Hombre menor de 30 años"

B: "Mujer"

C: "Persona mayor de 30 años que ha respondido sí"

Solución:



Para responder a todas las cuestiones, basta tener en cuenta el árbol anterior.

2.1.3 Frecuencia y probabilidad

Vamos a tratar de establecer la idea de probabilidad como, límite de las frecuencias. Lanzamos un dado perfectamente construido y suponemos que obtenemos la siguiente distribución de frecuencias:

Nº de la cara	frecuencia absoluta
1	27
2	25
3	32
4	27
5	33
6	36
	180

Completa la distribución con las frecuencias relativas. Dobla el número de tiradas y observa que las frecuencias relativas tienden a estabilizarse en torno a un cierto número. Este hecho es característico de los experimentos aleatorios y suele llamarse "estabilidad de las frecuencias" y el número hacia el que tienden se llama probabilidad del suceso. Esta probabilidad ha sido asignada después de realizar un experimento y se conoce con el nombre de probabilidad "a posteriori".

2.1.3.1 Probabilidad de Laplace

En el supuesto de que todos los sucesos elementales tengan la misma probabilidad (sucesos equiprobables) se define:

La **probabilidad** de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables a la verificación del suceso y el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{N}^{\text{o}}\ \text{de casos favorables}}{\text{N}^{\text{o}}\ \text{de casos posibles}}$$

Cuando asignamos la probabilidad a un suceso sin necesidad de experimentar, se conoce como probabilidad "a priori".

2.1.3.2 Propiedades de la probabilidad

* $P(\varnothing) = 0$

* $P(E) = 1$

* $P(A \cup A^c) = 1 = P(A) + P(A^c)$

* $0 \leq P(A) \leq 1$

2.1.3.3 Dependencia e independencia de sucesos

Disponemos de una urna con 10 bolas blancas y 10 bolas negras y consideramos el siguiente experimento:

E_1 = "sacar dos bolas, una a continuación de otra que devolvemos a la urna"
E_2 = "hacemos lo mismo, pero no devolvemos a la urna".
Suponemos los siguientes sucesos:

A: "salir negra en la 1ª extracción".
B: "salir negra en la 2ª extracción"

En ambos experimentos, queremos calcular el suceso $A \cap B$ y calcular $P(A \cap B)$:

a) Veamos qué ocurre cuando consideramos el experimento E_1:

$$P(A) = \frac{10}{20} \qquad P(B) = \frac{10}{20}$$

$$P(A \cap B) = \frac{VR_{10,2}}{VR_{20,2}} = \frac{10^2}{20^2} = \frac{1}{4}$$

Podemos observar que:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Diremos que los sucesos A y B son ***independientes***.

b) En el caso de considerar el experimento E_2:

$$P(A \cap B) = \frac{C_{10,2}}{C_{20,2}} = \frac{45}{190}$$

Puesto que las bolas no vuelven a la urna, no podemos sacar una repetida. En este caso la 2ª extracción está condicionada al resultado de la lª.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P\left(B/A\right)}$$

Diremos que los sucesos A y B son ***dependientes.***

2.1.3.4 Probabilidad condicionada

Veamos un ejemplo:

Los resultados de una encuesta sociológica acerca de la actitud política progresista o conservadora realizada sobre 334 universitarios de ambos sexos, con edades comprendidas entre 18 y 21 años, están registradas en la siguiente tabla:

	A: varones	**A^c: mujeres**	**Total**
B: actitud progresista	145	42	18
B^C: actitud conservadora	51	96	147
Total	196	138	334

$$\left.\begin{aligned} P\left(B/A\right) &= \frac{145}{196} \\ P(A) &= \frac{196}{334} \end{aligned}\right\} P(A \cap B) = P(A)P\left(B/A\right) = \frac{145}{334}$$

Se llama probabilidad ***condicionada de B/A***:

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{si} \quad P(A) \neq 0$$

Análogamente:

$$P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{si} \quad P(B) \neq 0$$

2.1.3.5 Probabilidad de la unión de sucesos en el caso de que $A \cap B \neq \emptyset$

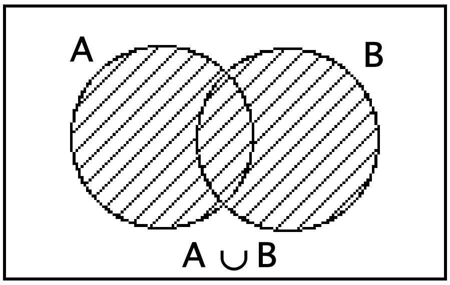


Figura 2.3: Unión de sucesos

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \qquad P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

$$B = (B - A) \cup (A \cap B) \qquad P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

EJEMPLO 2.5:

Se ha comprobado que en una ciudad están enfermos con diarrea el 60% de los niños; con sarampión el 50% y el 20% con ambas enfermedades.

a) Calcular la probabilidad de que elegido un niño al azar esté enfermo con diarrea, sarampión o ambas enfermedades.

b) En un colegio con 500 alumnos ¿Cuántos cabe esperar que estén enfermos con diarrea o sarampión?.

Solución:

Sean los sucesos:

A: "estar enfermo con diarrea".

B: "estar enfermo con sarampión".

a)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 0,6 + 0,5 - 0,2 = 0,9$$

El 90% de los niños tienen alguna de las dos enfermedades.

b) 500 x 0,9 = 450 niños que están enfermos.

EJEMPLO 2.6:

Un producto está formado por tres partes A, B y C. El proceso de fabricación es tal que la probabilidad de un defecto en A es 0,03, de un defecto en B es 0,04 y de un defecto en C es 0,08. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no sea defectuoso?.

Solución:

P(no defecto en A $\cap$ no defecto en B $\cap$ no defecto en C) =
= (1-0,03) (1-0,04) (1-0,08) = 0,856

La probabilidad de que el producto no sea defectuoso es del 85,6%.

EJEMPLO 2.7:

En un centro escolar, los alumnos de C.O.U. pueden optar por cursar, como lengua extranjera, entre inglés o francés. En un determinado curso, el 90% estudia inglés y el resto francés. El 30% de los que estudian inglés son varones y de los que estudian francés son el 40%. Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?.

Solución:

Sean los sucesos:

F: "estudiar francés"
I: "estudiar inglés"
V: "ser varón"
M: "ser mujer"

Nos piden la probabilidad:

$$P\left[(M \cap I) \cup (M \cap F)\right] = P(M \cap I) + P(M \cap F) =$$
$$= P(I)P\left(M/_{I}\right) + P(F)P\left(M/_{F}\right) =$$
$$= 0,9 \quad 0,7 + \quad 0,1 \quad 0,6 = 0,69$$

La probabilidad de que sea chica es del 69%

2.1.4 Probabilidad conjunta, marginal y condicional

Consideremos el experimento consistente en elegir a un alumno de C.O.U. de un Centro de Secundaria y anotar el sexo y el grupo al que pertenece (de entre los cinco que hay).

Tenemos los siguientes sucesos disjuntos: A_1 y A_2 "ser chico" o "ser chica" respectivamente y B_j "pertenecer al grupo j" (j=1,...,5).

La clasificación de los N alumnos mediante su sexo y grupo es:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$f_{i.}$
A_1	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	$f_{1.}$
A_2	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}	$f_{2.}$
$f_{.j}$	$f_{.1}$	$f_{.2}$	$f_{.3}$	$f_{.4}$	$f_{.5}$	N

Designamos por f_{ij} el número de alumnos del grupo j que tienen el sexo i.

Designamos por $f_{i.}$ el total de alumnos del sexo i, y por $f_{.j}$ el total de alumnos del grupo j.

Veamos algunos ejemplos de proporciones que podemos utilizar:

$\frac{f_{14}}{N}$ es la proporción de chicos del grupo 4 que hay en el total de alumnos.

$\frac{f_{14}}{f_{1.}}$ es la proporción de chicos del grupo 4 que hay en el total de chicos.

$\frac{f_{14}}{f_{.4}}$ es la proporción de chicos del grupo 4 que hay en el total de alumnos de dicho grupo.

Se llama **probabilidad conjunta** a:

$$P\left(A_i \cap B_j\right) = \frac{f_{ij}}{N}$$

A las probabilidades $P(A_i)$ y $P\left(B_j\right)$ se les conoce con el nombre de probabilidades marginales.

$$P(A_1) = \frac{f_{1.}}{N} = \frac{f_{11} + f_{12} + \ldots + f_{15}}{N} = \frac{f_{11}}{N} + \frac{f_{12}}{N} + \ldots + \frac{f_{15}}{N}$$

$$P(A_1) = \sum_{j=1}^{5} \frac{f_{1j}}{N}$$

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^{5} \frac{f_{ij}}{N}$$

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^{5} P\left(A_i \cap B_j\right)$$

$$P\left(B_j\right) = \sum_{i=1}^{2} P\left(A_i \cap B_j\right)$$

Podíamos interesarnos por conocer la probabilidad de A_1 suponiendo que ocurre B_2, es decir, la proporción en la que se encuentran los chicos en el grupo B_2.

$$P(A_1/B_2) = \frac{f_{12}}{f_{.2}}$$

Este tipo de probabilidades las conocemos con el nombre de probabilidad condicionada.

$$P\left(A_i/B_j\right) = \frac{f_{ij}}{f_{.j}} = \frac{f_{ij}/N}{f_{.j}/N} = \frac{P\left(A_i \cap B_j\right)}{P\left(B_j\right)}$$

$$P\left(A_i/B_j\right) = \frac{P\left(A_i \cap B_j\right)}{P\left(B_j\right)}$$

Tomando como base lo expuesto anteriormente, definimos la probabilidad condicionada de la siguiente manera:

Sean A y B dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral y sea P(B)>0

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A\cap B)=P(A/B)P(B)$$

Por simetría:

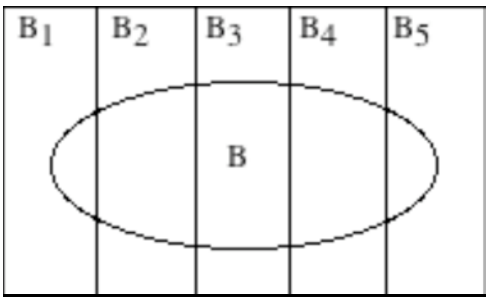
$$P(A\cap B)=P(B/A)P(A)$$

Diremos que los sucesos A y B son **dependientes** si P(A/B)=P(A), es decir: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

Supongamos que en todos los cursos hay chicos y chicas que practican algún deporte y sea B el suceso "alumno/a que practica algún deporte".

Recordamos que $B_1 ... B_5$ son los sucesos relacionados con los grupos.

Suponemos conocidas $P(B/B_1)...P(B/B_5)$, pretendemos saber la probabilidad de que elegido un alumno/a al azar, sea deportista.



$$B=(B\cap B_1)\cup(B\cap B_2)\cup(B\cap B_3)\cup(B\cap B_4)\cup(B\cap B_5)$$

Puesto que los sucesos son incompatibles:

$$P(B)=P(B\cap B_1)+...+P(B\cap B_5)$$
$$P(B)=P(B_1)P(B/B_1)+...+P(B_5)P(B/B_5)$$

Acabamos de aplicar el teorema de la probabilidad total que enunciamos a continuación.

2.1.5 Teorema de la probabilidad total

Sean B_1, B_2..B_n sucesos incompatibles dos a dos y sea B un suceso compatible con todos ellos. Suponemos conocidas las siguientes probabilidades:

$$P(B_1),\ P(B_2),\ \ldots,\ P(B_n)$$
$$P(B/B_1),\ P(B/B_2),\ \ldots,\ P(B/B_n)$$

Entonces:

$$P(B) = P(B_1)P(B/B_1)+\ldots+P(B_n)P(B/B_n)$$

Demostración:

$$B = (B_1 \cap B)\cup\ldots\cup(B_n \cap B)$$
$$P(B) = P(B_1 \cap B)+\ldots+P(B_n \cap B)$$

$$\boxed{P(B) = P(B_1)P(B/B_1)+\ldots+P(B_n)P(B/B_n)}$$

Es posible que pretendamos conocer la probabilidad de que elegido un alumno al azar y resultando ser deportista, pertenezca al grupo B_1.

$$P(B_1/B) = \frac{P(B_1 \cap B)}{P(B)}$$

La P(B) la tendríamos calculada por el teorema anterior .

El "Teorema de Bayes", que enunciaremos a continuación, es el que nos va a permitir calcular estas probabilidades.

2.1.6 Teorema de Bayes

Si B_1, B_2..B_n son sucesos incompatibles, B es compatible con todos ellos y conocemos $P(B/B_1)...P(B/B_n)$, entonces:

$$P(B_j/B)=\frac{P(B_j\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B_j)P(B/B_j)}{P(B)}$$

siendo $P(B)=P(B_1)P(B/B_1)+...+P(B_n)P(B/B_n)$

No es más que una aplicación de las probabilidades condicionadas.

La expresión fue desarrollada por el reverendo Thomas Bayes (1702-1761).

EJEMPLO 2.8:

El despertador de Javier no funciona muy bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, Javier llega tarde a clase con probabilidad 0,2, pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde a clase es 0,9.

a) Determine la probabilidad de que llegue tarde a clase y haya sonado el despertador.

b) Determine la probabilidad de que llegue temprano a clase.

c) Javier ha llegado tarde a clase, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?.

Solución:

Sean los sucesos:

A: "sonar el despertador" $P(A)=0.8$

B: "llegar tarde a clase"

a)

$$P(A\cap B)=P(A)P(B/A)=0,8\ \ 0,2=0,16$$

b)

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B)$$

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

$$P(B) = P(A)P(B/A) + P(\overline{A})P(B/\overline{A})$$

$$P(B) = 0,8 \quad 0,2 + 0,2 \quad 0,9 = 0,16 + 0,18 = 0,34$$

c)

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)} = \frac{0,2 \quad 0,8}{0,34}$$

$$P(A/B) = 0,47$$

EJEMPLO 2.9:

De un determinado país, el porcentaje de declaraciones fiscales que son correctas es del 60%, 40% y 80% según se trate de industriales, profesionales liberales o asalariados.

Se sabe que del total de declaraciones el 10% son de industriales y el 20% de profesionales liberales. Se van a realizar 1500 inspecciones.

a) ¿Cuántos industriales, profesionales liberales y asalariados han de ser inspeccionados si se desea que la inspección sea proporcional a la probabilidad de declaración incorrecta en cada categoría socio-profesional?.

b) Compara esta distribución de las 1500 inspecciones con la que se tendría en el caso de hacerla proporcional al número de declaraciones de cada categoría?

Solución:

Sean los sucesos:

A: "La declaración corresponde a un industrial"

B: "La declaración corresponde a un profesional liberal"

C: "La declaración corresponde a un asalariado"

D: "La declaración es incorrecta"

a)

$$P(D \cap A) = P(A)P(D/A) = 0,10 \quad 0,4 = 0,04$$

$$P(D \cap B) = P(B)P(D/B) = 0,20 \quad 0,6 = 0,12$$

$$P(D \cap C) = P(C)P(D/C) = 0,7 \quad 0,2 = 0,14$$

Se trata de repartir 1500 entre 4, 12 y 14 por ejemplo.

Industriales	4	1500 / 30 = 50	4 50 = 200
P. Liberales	12		12 50 = 600
Asalariados	14		14 50 = 700
Total	30		1500

b)

Industriales	10	1500 / 100 = 15	10 15 = 150
P. Liberales	20		20 15 = 300
Asalariados	70		70 15 = 1050
Total	100		1500

	Modelo 1	Modelo 2
Industriales	200	150
P. Liberales	600	300
Asalariados	700	1050

"EL TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL Y EL TEOREMA DE BAYES EN EL CONTEXTO DEL ANÁLISIS DE DECISIONES CLÍNICAS"

2.2 Ampliación

El análisis de decisiones clínicas permite a los médicos examinar decisiones médicas complejas con la misma precisión y claridad que la resonancia magnética o la tomografía computerizada brindan a las exploraciones anatómicas.

Stefen G. Pauker.
Jefe del Servicio de Decisión clínica, Departamento de Medicina.
Centro Médico de Nueva Inglaterra. Facultad de Medicina de Tufts, Boston.
Tiempos Médicos Nº403. 1989

2.2.1 Toma de decisiones en Medicina

La toma de decisiones, en Medicina, ha sido y es con frecuencia, un proceso implícito que depende de ciertas inexactitudes que van desde un error de laboratorio hasta la ambigüedad de los hallazgos clínicos o la falta de seguridad en el significado de una información, aún cuando sepamos que es correcta.

Este método tácito es tradicional en la práctica médica, denominándose frecuentemente "el arte de la Medicina".

El análisis formal de las decisiones emplea el lenguaje de la probabilidad para reflejar la inexactitud de los datos clínicos y su relación con la enfermedad.

El análisis de decisiones no es un método para descubrir verdades científicas, sino un procedimiento dirigido a la selección de la estrategia que maximice las consecuencias favorables o minimice los resultados adversos; es decir, indica el curso de acción óptimo en situaciones de incertidumbre diagnóstica.

Probablemente, el objetivo más importante de la actividad asistencial sea mejorar el curso clínico de los pacientes. Para ello es imprescindible un diagnóstico y un tratamiento correcto.

En la mayoría de las situaciones clínicas se dispone de un tratamiento de elección que el médico prescribe rutinariamente. En estas situaciones no hay nada que decidir y el médico se siente tranquilo porque cree que está haciendo lo mejor. Pero a veces se le plantean situaciones complejas en las que tiene que tomar una decisión para la que no hay respuesta fácil.

El médico puede fiarse de su intuición y experiencia ante casos similares, consultar con otros compañeros con más experiencia o revisar la literatura en busca de publicaciones que evalúen la eficacia y seguridad de los distintos tratamientos.

Generalmente la experiencia personal no es suficiente para valorar probabilísticamente las ventajas e inconvenientes del tratamiento y lo mismo puede ocurrir con la opinión de otros colegas; es preciso combinar la experiencia con la revisión crítica de la literatura.

Un análisis de decisión exhaustivo, incluyendo la revisión completa de la literatura clínica pertinente, puede llevar mucho tiempo.

En todas aquellas situaciones en las que la toma de decisiones es complicada podremos utilizar lo que en epidemiología, y por supuesto en Estadística, se conoce como análisis de decisiones clínicas. En los centros hospitalarios en los que existe una Unidad de Análisis de Decisiones, aproximadamente en 48 horas, el médico cuenta con un diagnóstico altamente probable; un tiempo de respuesta comparable al de los otros servicios de consulta.

Esta técnica sigue una serie de pasos secuenciales: crear un árbol que recoja la secuencia lógica del problema, asignar probabilidades a las ramas, asignar utilidades a cada curso de acción, combinar las probabilidades de cada consecuencia y analizar si nuestra decisión sigue siendo la óptima aun cuando se produzcan cambios razonables en la probabilidad o en la utilidad de cada rama del árbol (análisis de sensibilidad).

2.2.2 Árbol de decisiones

El análisis de decisiones fragmenta un problema complejo en una serie de problemas más pequeños, que se pueden abordar por separado. Después de obtener soluciones satisfactorias para los pequeños problemas, el formalismo de la teoría de la decisión los recombina en un modelo que acomete los problemas más complejos.

El análisis de decisión clínica consta, como ya señalamos, de varios pasos.

*El primero es diseñar un **árbol de decisión** que especifique explícitamente el conjunto de estrategias disponibles y los resultados más relevantes.*

Identificaremos las decisiones, es decir las acciones sobre las que el clínico tiene control, con cuadrados, los sucesos fuera del control del decisor, con círculos, y los resultados con rectángulos.

El árbol parte de un ***nudo*** del cual salen diversas opciones que conducen a las posibles alternativas de los acontecimientos ajenos a la voluntad del decisor (**estados de la naturaleza**).

El ***nudo de decisión*** corresponde al momento en el que el decisor tiene bajo su control elegir una u otra serie de acciones. El curso natural de los acontecimientos transcurrirá, en gran parte, sin someterse a la voluntad del decisor. Las distintas posibilidades que emergen de una situación dada arrancan de un ***nudo de azar***, representado por un *círculo*.

El resultado final correspondiente a cada rama del árbol es representado por un rectángulo o ***nudo terminal*** en cuyo interior se representa la realidad pertinente. El valor de cada resultado se conoce como ***utilidad asignada***.

La ramificación del árbol puede ser dicotómica, tricotómica o multicotómica; es decir, de cada nudo de azar pueden partir dos, tres, o más ramas. Una trayectoria o camino, en un árbol de decisiones, es una secuencia particular de acciones.

El segundo paso del análisis de decisión es concretar la probabilidad de cada suceso en términos numéricos, desde cero hasta uno.

En el diagrama, de acuerdo con el postulado de exhaustividad, la suma de probabilidades de cada una de las ramas de los nudos de azar, será la unidad.

De un nudo pueden partir **k** ramas (sucesos inciertos) A_1, A_2, ..., A_k, cada una con probabilidades p_i y resultado X_i, siendo posible evaluar la utilidad media del nudo.

El tercer paso es asignar una ***utilidad*** *a cada resultado; es decir a cada una de las consecuencias de un curso de acción.*

La medida de las preferencias del enfermo para cada una de las consecuencias de los cursos de acción, se llama utilidad.

Para calcular la utilidad esperada de las diversas alternativas se suman los productos de los valores de los resultados, por la probabilidad de cada una de ellas. (Folding back).

La utilidad esperada representa la **esperanza matemática** de la utilidad asignada a las ramas parciales del árbol.

La estrategia elegida será aquélla que proporcione el máximo de utilidad esperada.

El último paso debe ser efectuar un "análisis de sensibilidad" sobre el modelo de decisión, variando una o varias probabilidades.

Si la estrategia recomendable cambia conforme varía la probabilidad de un suceso, se dice que la decisión es *sensible* a dicha probabilidad y por tanto, la estrategia recomendada cambia a un cierto umbral de probabilidad.

Si la estrategia recomendada no varía dentro de un rango de incertidumbre razonable, es posible recomendar dicha estrategia con mayor confianza.

Una de las ventajas fundamentales de los árboles de decisión es que no se olvida ningún curso de acción relevante y además se explicitan todas sus consecuencias. Obviamente, no necesariamente hemos de hacer lo que propone el árbol; quién toma las decisiones somos nosotros y no el árbol. Lo que ocurre es que disponemos de una ayuda explícita en la que basar o justificar nuestra conducta, incluso ante posibles demandas legales, tema éste que preocupa hoy día a muchos profesionales de la medicina.

Con fines didácticos desarrollaremos un ejemplo típico tomado de la literatura, convenientemente adaptado. (Para más detalles, consultar: Weistein, M.C. & Fineberg, H.V. (1980) *Clinica Decision Analysis*. Ed. Saunders Company.)

"EL TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL Y EL TEOREMA DE BAYES EN EL CONTEXTO DEL ANÁLISIS DE DECISIONES CLÍNICAS"

2.3 Trabajo de investigación

2.3.1 Planteamiento del problema

Un paciente llega al Servicio de Urgencias de un Hospital aquejado de un fuerte dolor en el abdomen. El médico de urgencias sabe que puede estar sucediendo uno de los tres sucesos siguientes:

A_1:*Que el paciente tenga apendicitis perforada*	*(Perf)*
A_2:*Que el paciente tenga apendicitis inflamada*	*(Inf)*
A_3:*Que el paciente presente un dolor inespecífico*	*(Dines)*

El doctor duda entre actuar inmediatamente *(Decidir ahora)*, o *mantener 6 horas al paciente en observación* y actuar según la evolución *(Esperar 6 horas)*.

El doctor sabe por los datos que constan en el Servicio de Urgencias que:

$p(A_1) = 0.03$
$p(A_2) = 0.13$
$p(A_3) = 0.84.$

Ante cualquiera de las tres posibles soluciones hay un suceso que puede producirse y es que el *paciente puede morir* (**M**).

El médico conoce además que 27 de cada 1000 pacientes que tienen su apendicitis perforada mueren si se opera inmediatamente: $P(M/A_1)=0.027$, y conoce también que $P(M/A_2) = 0.001$ y $P(M/A_3) = 0.0007$.

$P(M/A_1)=0.027$
$P(M/A_2) = 0.001$
$P(M/A_3) = 0.0007$

En caso de no operar *(No Operar)* esos valores cambian considerablemente ya que 500 de cada mil mueren tanto si la apendicitis está inflamada, como si está perforada, y ninguno muere si se trata de un dolor inespecífico.

El médico dispone de la información similar para el caso en que la decisión sea esperar seis horas, la cual aparece recogida en el árbol que se adjunta, en el cual aparece también reflejada la información descrita más arriba.

La lectura del resto de la información del árbol es sencilla: por ejemplo, cuando se mantiene a los pacientes en observación se sabe que un 13% empeoran *(Empeorar)*, un 36% permanece con los mismos síntomas *(Estable)* y un 51% mejoran *(Mejorar)*.

En caso de empeorar la probabilidad de que la apendicitis esté perforada es de 0.25, la probabilidad de que esté inflamada es 0.75, y la probabilidad de que se trate de un dolor inespecífico es cero.

El nº de individuos que mueren depende, obviamente, de la decisión del médico.

Si tras un periodo de observación el paciente empeora y la decisión fue no operar, 500 de cada mil de los que tienen apendicitis perforada mueren, pero si la decisión es operar, solo mueren 27 de cada mil.

La lectura del resto de las ramas del árbol es similar. (Ver figura 2.4).

2.3.2 Análisis de la estrategia óptima

Para resolver el problema hemos de tener en cuenta el Teorema de la Probabilidad Total, según el cual:

$$\boxed{\begin{aligned} P(M) &= P(M\cap A_1) + P(M\cap A_2) + P(M\cap A_3) = \\ &= P(M/A_1)P(A_1) + P(M/A_2)P(A_2) + P(M/A_3)P(A_3) \end{aligned}}$$

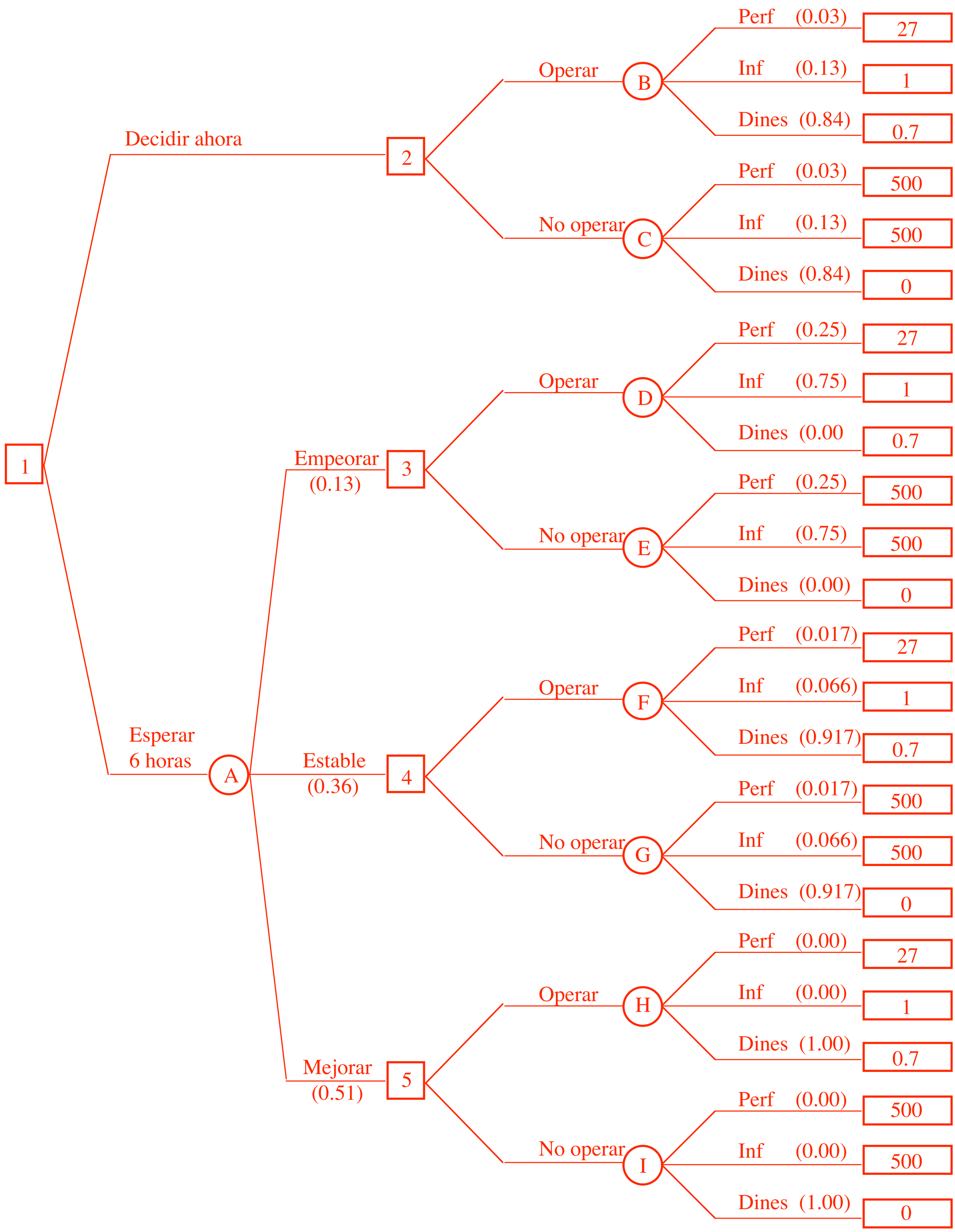


Figura 2.4: Árbol de decisión para el ejemplo de la apendicitis. Adaptado de Weistein & Fineberg (1980)

Consideremos la rama superior del árbol de decisiones y analicemos la información relativa al nudo aleatorio **B** (ver figura 2.5):

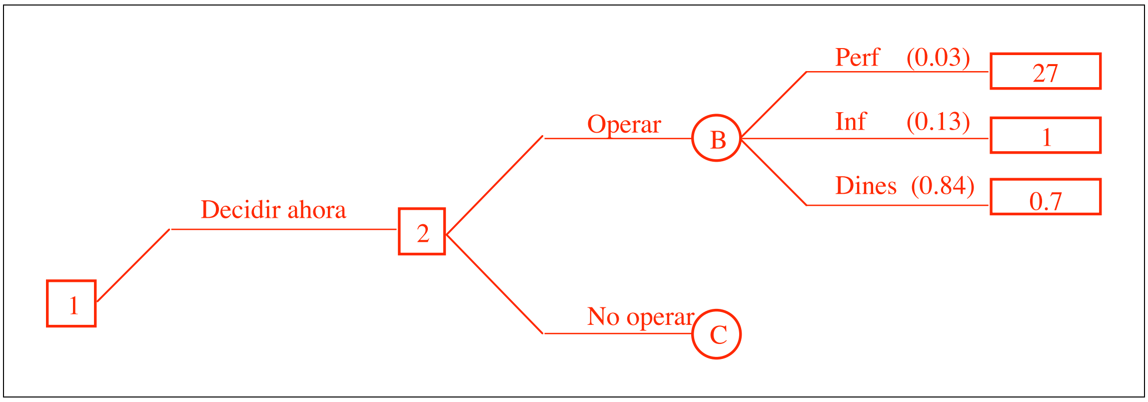


Figura 2.5: Situación correspondiente al nudo B

En este caso,

$$P(M) = 0.027 \cdot 0.03 + 0.001 \cdot 0.13 + 0.0007 \cdot 0.84 = 0.00153 = 1.53‰$$

Por tanto, para el nudo aleatorio $\boxed{\text{B}}$, la conclusión es:

Si decide ahora, y la decisión es operar, el número de muertos esperado es 1.53%

El valor asignado al nudo **B** es 1.53‰ (ver figura 2.6)

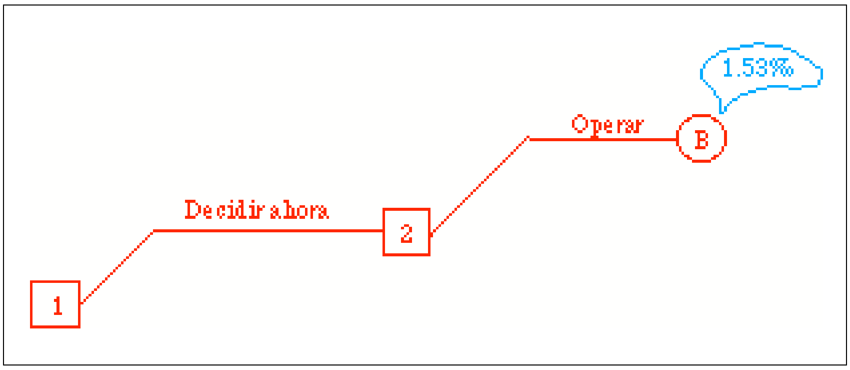


Figura 2.6: Valor asignado al nudo B

Para el nudo C la situación es la reflejada en la figura 2.7.

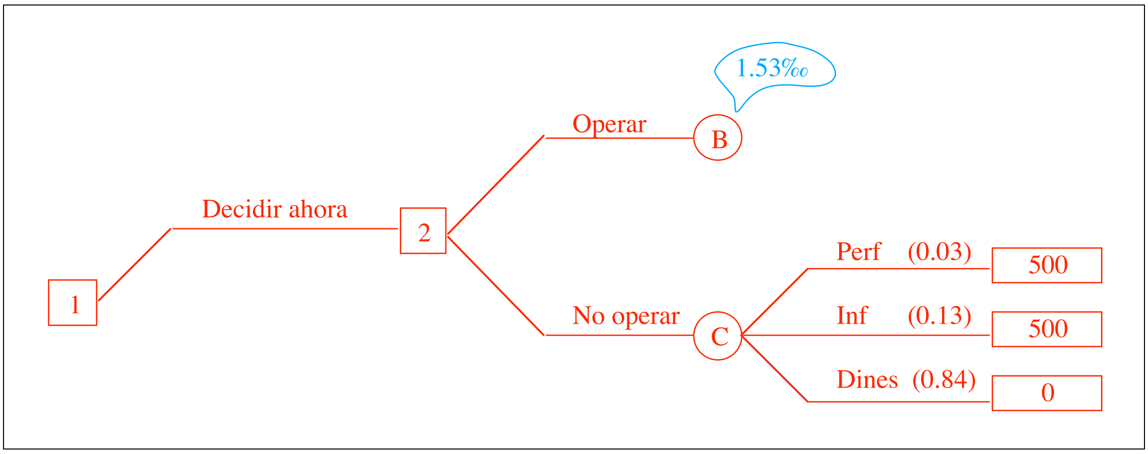


Figura 2.7: Situación correspondiente al nudo C

En este caso:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.03 \qquad P(M/A_1) = \frac{550}{1000} = 0.5 \\ P(A_2) &= 0.13 \qquad P(M/A_2) = 0.5 \\ P(A_3) &= 0.84 \qquad P(M/A_2) = 0.0 \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M/A_1)P(A_1) + P(M/A_2)P(A_2) + P(M/A_3)P(A_3) = \\ &= 0.5 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.13 + 0.084 \cdot 0 \cdot 0.84 = \\ &= 0.015 + 0.065 = 0.08 \end{aligned}$$

Por tanto, para el nudo C, la conclusión es:

Si decide ahora y la decisión es no operar, el número esperado de muertos es 80 de cada 1000

Teniendo en cuenta la información para los dos nudos aleatorios de la rama superior del árbol, podemos efectuar la asignación al nudo decisional 2 (figura 2.8):

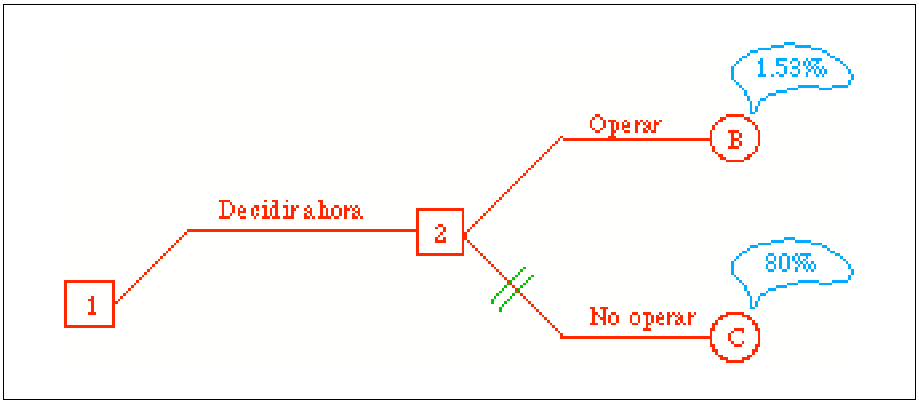


Figura 2.8: Valor asignado al nudo C

De entre las dos anteriores, la peor estrategia sería la asociada al nudo C luego si el médico decide en el momento, lo más coherente es decidir operar, ya que el número esperado de muertos es considerablemente más bajo.

Descartamos pues la rama que lleva al nudo C, en el gráfico aparecerá tachado //, y le asignaremos al nudo 2 el correspondiente a la rama que lleva a B; es decir, el resultado sería (ver figura 2.9):

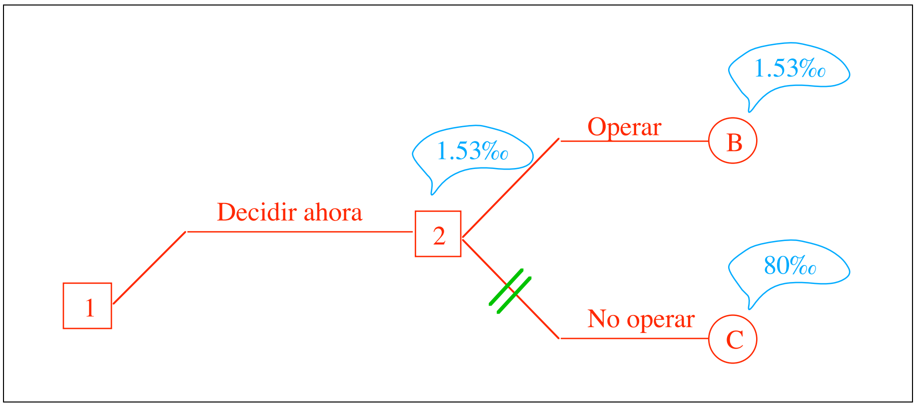


Figura 2.9: Situación y valor asignado correspondientes al nudo 2

La conclusión relativa a la rama superior del árbol es, pues:

En caso de ***"decidir ahora"****, la decisión óptima es* ***"operar".***

Los nudos de azar **D**, **E**; **F**, **G**; **H**, **I**, llevan un análisis idéntico, tomando en cada caso los datos del árbol adecuados y los resultados obtenidos son (ver figura 2.10):

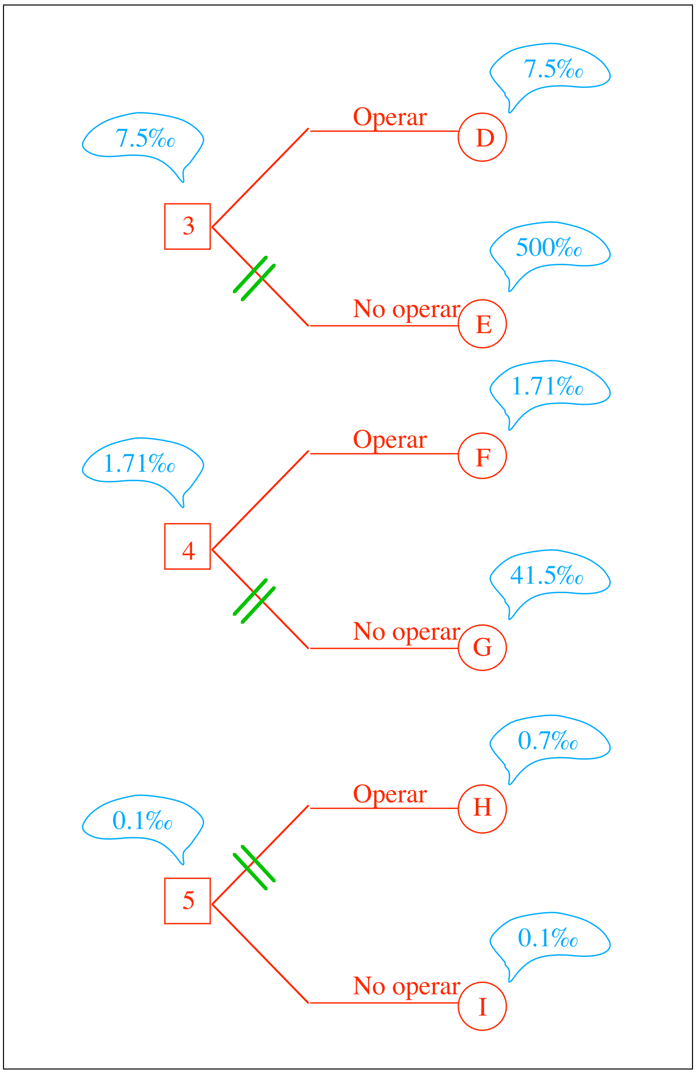


Figura 2.10: Resultados para los nudos D, E; F, G; H, I,

Las conclusiones parciales, correspondientes a los nudos decisionales 3 , 4 y 5 son, pues:

Nudo 3

Si el médico decidió esperar y durante las horas de observación, el paciente empeora, la estrategia óptima es operar.

Nudo 4

Si el médico decidió esperar y durante las horas de observación, el paciente permanece con los mismos síntomas, la estrategia óptima es operar.

Nudo $\boxed{5}$

Si el médico decidió esperar, y durante las horas de observación el paciente mejora, la estrategia óptima es no operar.

El último paso es analizar la información correspondiente al nudo de azar (A) la información disponible es la siguiente (figura 2.11):

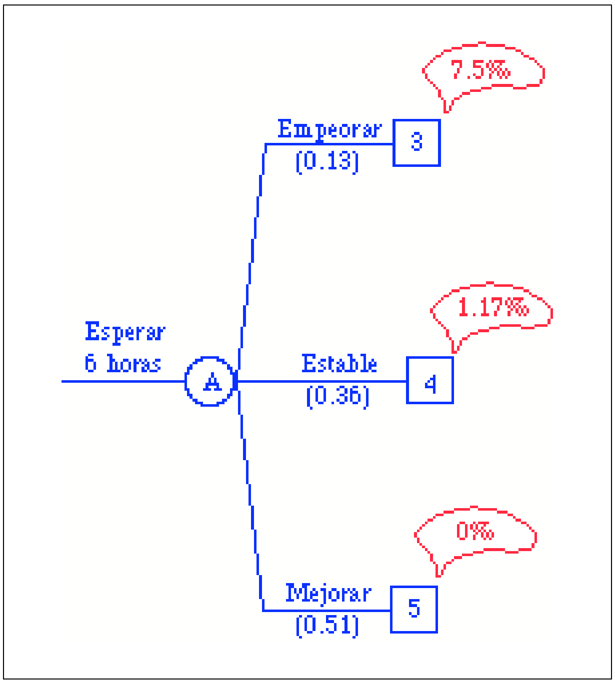


Figura 2.11: Información correspondiente al nudo de azar A

$$P(A) = 0.0075 \cdot 0.13 + 0.00117 \cdot 0.36 + 0 \cdot 0.51 = 0.001396 \approx 0.0014$$

Por tanto, la conclusión para el nudo (A) es:

Nudo (A)

Si decide esperar 6 horas, cabe esperar 1.4 muertos de cada mil

Para el nudo decisional $\boxed{1}$ la situación es (figura 2.12)

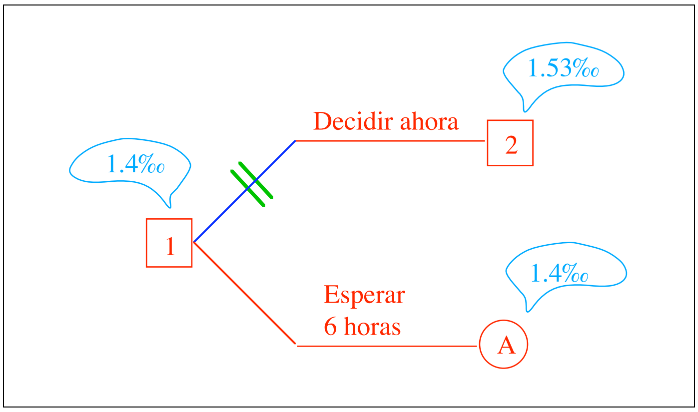


Figura 2.12: Situación del nudo decisional 1

Descartamos, pues, la rama superior, y aconsejaremos como estrategia óptima, tras el análisis:

Estrategia óptima:

Esperar 6 horas y valorar la evolución